

**Klausurprüfung in Grundlagen der Mathematik II für  
Wirtschaftsinformatik und Systems Engineering  
im SS 2007 am 14. Juli 2007**

**Aufgabe 1:**

4 + 4 + 4 Punkte.

- a) Man untersuche die Folgen  $a_n := \frac{3^{n+2}}{(n+1)!}$  und  $b_n := n \cdot \sin(\frac{1}{n})$ . auf Konvergenz und berechne den Grenzwert.
- b) Man prüfe die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ .

**Lösung:** a) Quotientenkriterium für Folge  $a_n$ :

$$|a_{n+1}/a_n| = \frac{3^{n+3}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^{n+2}} = \frac{3(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} = \frac{3}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$b_n = n \cdot \sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  und da  $\sin(x)$  stetig ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{1}{n}) = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}) = \sin(0) = 0$ .  $b_n$  wird beim Grenzübergang zu  $\frac{0}{0}$ , d.h. die de l' Hospital'sche Regel kann zur Grenzwertberechnung verwendet werden:  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{1}{n}) \cdot (-\frac{1}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\frac{1}{n}) = \cos(0) = 1$  (weil  $\cos(x)$  stetig ist).

- b)  $c_n := (-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 1 \Rightarrow c_n$  ist **keine** Nullfolge  $\Rightarrow$  die **Reihe** divergiert!

**Aufgabe 2:**

5 + 7 Punkte.

Gegeben sei die Funktion  $\frac{x^3}{x-\sqrt{x}}$ .

- a) Man berechne ihre 1. Ableitung !
- b) Man gebe die Tangentengleichung an der Stelle  $x_0 := 4$  an!

**Lösung:** a)  $f' = \frac{(x-\sqrt{x}) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot (1-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x-\sqrt{x})^2} = \frac{3x^3 - 3x^{\frac{5}{2}} - x^3 + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}}{(x-\sqrt{x})^2} = \frac{4x^3 - 5x^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot (x-\sqrt{x})^2}.$

- b) Tangentengleichung:  $y = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 32 + 12 \cdot (x - 4).$

**Aufgabe 3:**

22 Punkte.

Man diskutiere die Funktion  $f(x) := e^{-x} \cdot (x^2 - 4).$ **Lösung:**

1. Definitionsbereich =  $\mathbb{R}$ .

2. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$  (zweimalige Anwendung von de l'Hospital, da die Fälle  $\frac{\infty}{\infty}$  vorliegen!). Wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ist die  $x$ -Achse eine Asymptote von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ .

3. Nullstellen:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

4. 1. und 2. Ableitung:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 4) + e^{-x}2x = e^{-x}(-x^2 + 2x + 4).$$

$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x + 4) + e^{-x}(-2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 4x - 2).$$

$f'(x), f''(x)$  sind für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

5. Nullstellen von  $f'(x), f''(x)$ :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \mp \sqrt{5}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{3/4} = 2 \mp \sqrt{6}.$$

Wendepunkte sind die Nullstellen  $x_3, x_4$  von  $f''(x)$ .

Aus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  folgt, dass  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  keine Gerade zur Asymptote haben kann.

6. Monotonie:

$f(x)$  wächst monoton für  $x \in [x_1, x_2]$  und fällt monoton für  $x \in \mathbb{R} \setminus ]x_1, x_2[$ .

7. Krümmung:

$f''(x) < 0$  für  $x \in ]x_3, x_4[$  und  $f''(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus [x_3, x_4]$ .

Es gilt  $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ , woraus folgt, dass  $f''(x_1) > 0$  und  $f''(x_2) < 0$  gilt, also hat  $f(x)$  an der Stelle  $x_1$  ein lokales Minimum und bei  $x_2$  ein lokales Maximum.

Skizze: Siehe Abbildung 1

#### Aufgabe 4:

8 + 5 Punkte.

a) Man berechne eine Stammfunktion zu  $\frac{x^5}{x^2+2x+1}$ .

b) Man berechne das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx$ .

**Lösung:** a) Der Integrand ist eine rationale Funktion, Zählergrad  $\geq$  Nennergrad  $\Rightarrow$  Division mit Rest nötig:

$$x^5 = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) + (5x + 4).$$

$$\text{Damit gilt: } \frac{x^5}{x^2+2x+1} = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + \frac{5x+4}{x^2+2x+1}.$$

$$\text{Partialbruchzerlegung für } \frac{5x+4}{x^2+2x+1} = \frac{5x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1) + B}{(x+1)^2}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } x : 5 = A, x^0 : 4 = A + B \Rightarrow B = -1.$$

$$\text{Damit erhält man: } \int \frac{x^5}{x^2+2x+1} dx = \int (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) dx + \int \frac{5}{x+1} dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5 \ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1}.$$

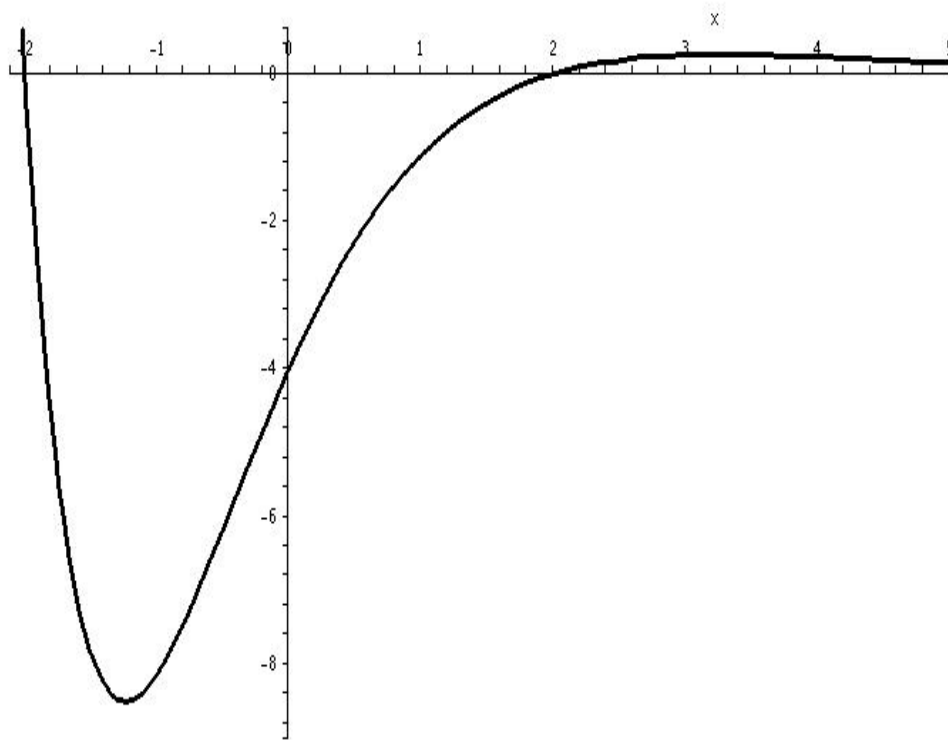


Abbildung 1: Graph von  $f(x)$

b)  $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b) := \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx$ .

Substitution zur Berechnung des Integrals:  $t := x^2, dt = 2x dx \Rightarrow I(b) = \int_0^{b^2} \frac{1}{2} \cdot e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t} \Big|_0^{b^2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-b^2}) \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 5:

13 Punkte.

Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion  $f(x, y) := 2x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$  und gebe ihren Typ an.

**Lösung:**  $\nabla f = (6x^2 + y^2 + 12x, 2xy + 2y)$ .

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff 6x^2 + y^2 + 12x = 0 \text{ und } 2xy + 2y = 0.$$

$$2y(x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ oder } x = -1.$$

a)  $y = 0 : 6x^2 + 12x = 0 \iff 6x(x + 2) \iff x = 0 \text{ oder } x = -2.$

$$\implies \text{stationäre Punkte: } (0, 0), (-2, 0).$$

b)  $x = -1 : 6 + y^2 - 12 = 0 \implies y = \pm\sqrt{6}.$

$$\implies \text{weitere stationäre Punkte: } (-1, \sqrt{6}), (-1, -\sqrt{6}).$$

Typ der stationären Punkte: Hesse-Matrix  $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x + 12 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies H(0, 0)_{1,1} = 12 > 0, \det(H(0, 0)) = 24 > 0 \implies \text{lokales Minimum !}$$

$$H(-2, 0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies H(-2, 0)_{1,1} = -12 < 0, \det(H(-2, 0)) = 24 > 0 \implies \text{lokales Maximum !}$$

$$H(-1, \pm\sqrt{6}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{6} \\ \pm 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \implies \det H(-1, \pm\sqrt{6}) = -24 < 0 \implies \text{Sattelpunkte !}$$

### Aufgabe 6:

15 Punkte.

Man berechne mit der Methode des Lagrangeschen Multiplikators die kürzeste Entfernung des Punktes  $(2, 2)$  vom Einheitskreis.

**Lösung:** Nebenbedingung:  $N := x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Entfernung  $d$  des Punktes  $(2, 2)$  von einem Punkt  $(x, y)$  des Einheitskreises:

$$d := \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}.$$

Da  $d(x, y)$  minimal genau dann ist, wenn es  $d^2(x, y)$  ist, betrachtet man die Lagrangefunktion  $L(x, y, \lambda) := d^2(x, y) + \lambda \cdot N(x, y)$ . Bedingungen für das Minimum:

$$\partial L / \partial x = 2(x-2) + \lambda 2x = 0$$

$$\partial L / \partial y = 2(y-2) + \lambda 2y = 0$$

$$\partial L / \partial \lambda = x^2 + y^2 - 1 = N = 0$$

$$\implies (2+\lambda)x = 4, (2+\lambda)y = 4 \implies 0 \neq 2+\lambda \text{ und } (2+\lambda)x = (2+\lambda)y \implies x = y, \text{ weil } 1+\lambda \neq 0.$$

Eingesetzt in die Nebenbedingung erhält man  $2x^2 = 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$d^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)^2 < d^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)^2.$$

Also hat der Punkt  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  vom Punkt  $(2, 2)$  die kürzeste Entfernung.

### Aufgabe 7:

12 Punkte.

Man berechne das Integral  $\int_F x \cdot y \, dF$  für  $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq 1/x^2\}$ .

$$\begin{aligned} \textbf{Lösung:} \quad \int_F x \cdot y \, dF &= \int_1^2 x \cdot \left( \int_{-x}^{\frac{1}{x^2}} y \, dy \right) dx = \int_1^2 x \cdot \left( \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{-x}^{\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{2} (x^{-4} - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x^{-3} - x^3) dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} x^{-2} - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{8} \left( -2 \cdot \frac{1}{4} - 16 + 2 + 1 \right) = \frac{-27}{16}. \end{aligned}$$